Cohomogeneity one actions on symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit (General study on Riemannian submanifolds)

AUTHOR(S):
田丸, 博士

CITATION:
田丸, 博士. Cohomogeneity one actions on symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit (General study on Riemannian submanifolds). 数理解析研究所講究録 2002, 1292: 106-114

ISSUE DATE:
2002-10

数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 106-114

Cohomogeneity one actions on symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit

上智大学・理工学部　田丸　博士 (Hiroshi Tamaru)

Sophia University

0 要約

本稿では, 既約対称空間への cohomogeneity one action の中で, その特異軌道が全測地的部分多様体であるようなものの分類を紹介する. 特にグラスマン多様体の場合に, その結果を詳細に述べたい. 本稿は, Hull 大学 (英国) の Jürgen Berndt 氏との共同研究 ([2]) に基づいている.

1 導入

この節では, cohomogeneity one action の定義, 簡単な例, 知られている事実等について述べる.

定義 1.1 リーマン多様体への等長的作用が *cohomogeneity one action* であるとは, その非特異軌道の余次元が 1 となることである.

非特異軌道とは次元が最大の軌道のことであり, そうでない軌道を特異軌道と呼ぶ.

例 1.2 次の作用は *cohomogeneity one action* である :

(i) $SO(n)$ の自然な $\mathbb{R}^n$ への作用. この場合, 特異軌道は $\{0\}$ であり, 非特異軌道は S^{n-1} である.
(ii) $\mathbb{R}^{n-1}$ の平行移動としての $\mathbb{R}^n$ への作用. この場合, 特異軌道は存在せず, 非特異軌道は $\mathbb{R}^{n-1}$ である.
(iii) $SO(k)\cdot\mathbb{R}^{n-k}$ の $\mathbb{R}^n$ への作用. この場合, 特異軌道は $\mathbb{R}^{n-k}$, 非特異軌道はその周りのチューブ $\mathbb{R}^{n-k}\times S^k$ である.

我々は, 対称空間への cohomogeneity one action を分類することを目標としている. これは, 対称空間の等質超曲面を分類することと同値. 分類は, 次の orbit-equivalent と呼ばれる同値類において行う.

定義 1.3 群 H および H' がリーマン多様体 M に等長的に作用しているとする. これらの作用が *orbit-eqivalent* であるとは, 全ての H-軌道を H'-軌道にうつす等長変換が存在すること, e.g., $\exists f \in \mathrm{Isom}(M) : \forall p \in M,\ f(H \cdot p) = H' \cdot f(p)$.

事実 1.4 既約対称空間 M への *cohomogeneity one action* に対し, 次が成り立つ：

(i) M がコンパクト型のとき, 特異軌道は 2 つ.
(ii) M が非コンパクト型のとき, 特異軌道は 1 つも無いか, ただ 1 つあるかのいずれかである.

事実 1.5 対称空間への *cohomogeneity one action* は, 1 つの軌道で決まる.

すなわち, H および H' の M への作用が cohomogeneity one action であるとき, 一つの H-軌道をある H'-軌道に移す等長変換が存在すれば, それらの作用は orbit-equivalent である. つまり, 一つの軌道が決まれば, 他の軌道も自動的に決まることになる. これは一般の作用に関しては成立しない性質である.

2 知られている結果

与えられたリーマン多様体 M に対して, そこへの cohomogeneity one action を分類する, という問題は自然である. 実際, いくつかの "良い" 多様体に対しては古くから研究されており, 分類も知られている. 本節ではそれらについて述べる.

定理 2.1 (Cartan [3]) 実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ への *cohomogeneity one action* は, 次の $n+1$ 個である：

(i) $SO^0(n,1)$ の岩沢分解の巾零部分 N の作用. この作用の軌道は全て非特異であり, 軌道の全体は *horosphere foliation* をなす.
(ii) $SO^0(n-1,1)$ の作用. この作用の軌道は全て非特異であり, それらは全測地的な $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-1}$ とその *equidistant* な超曲面である.
(iii) $SO^0(n-k,1) \times SO(k)$ の作用. この作用の特異軌道は全測地的な $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-k}$, 非特異軌道はその周りのチューブ $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-k} \times S^{k-1}$ である.

この様相は, 例 1.2 で述べたユークリッド空間の場合と酷似している.

定理 2.2 (Hsiang-Lawson [4]) 球面 S^n への *cohomogeneity one action* の全体は, 階数 2, 次元 $n+1$ の対称空間のイソトロピー表現の全体と *1:1* に対応する.

この対応は, 条件を満たす対称空間 $M = G/K$ に対し, T_oM の単位球への K の作用を考えることによって得られる. また, この作用によって得られる等質超曲面の主曲率は, 対称空間 M のルート系を使って計算できることが知られている.

また Kollross ([5]) によって, コンパクト型既約対称空間への cohomogeneity one action が分類されている. コンパクト型の場合には, 等長変換群の極大部分群の分類が知られているので, それを用いることが出来る. 特に, 各 M に対して cohomogeneity one action は有限個しか存在しない.

定理 2.3 (Berndt-Tamaru [1]) M を非コンパクト型既約対称空間, $G = KAN$ を M の等長変換群の連結成分の岩沢分解とする.

(i) AN の余次元 1 の部分群の M への作用は, 非特異軌道を持たない *cohomogeneity one action* である.
(ii) 非特異軌道を持たない M への *cohomogeneity one action* は (i) の方法で全て得られる.
(iii) 非特異軌道を持たない M への *cohomogeneity one action* の *moduli* は

$$(\mathbb{R}P^{r-1} \cup \{1, \ldots, r\})/\mathrm{Aut}(DD)$$

で与えられる. ただしここで, $r := \mathrm{rank}(M)$, $\mathrm{Aut}(DD)$ は *Dynkin* 図形の自己同型群.

特に $r = 1$ の場合には, $\mathrm{Aut}(DD)$ は単位元だけの群なので, cohomogeneity one action の moduli は 2 点だけからなる. これは Cartan の分類結果（定理 2.1）と合致している. また $r \geq 2$ の場合には, cohomogeneity one action は無限に存在する. すなわち, コンパクト型の場合と非コンパクト型の場合では, 全く様相が異なっていることが分かる.

以上のことより, 既約対称空間への cohomogeneity one action の分類問題で, 残っているのは, 非コンパクト型で特異軌道を 1 つだけ持つものである. そこで本稿では, その特異軌道が全測地的部分多様体であるようなものの分類を紹介する. 分類のキーは「双対性」であり, それを用いてコンパクト型対称空間の問題に置き換えて解いていく. 結局,「コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action において, どの作用が全測地的な特異軌道を持つか」という問題に帰着される. このコンパクト型対称空間の問題は, Kollross の分類結果 ([5]), および Leung の reflective 部分多様体に関する結果 ([6], [7]) を用いて解決される.

3 双対性

この節では, 我々の分類のキーとなる双対性を調べる. 対称空間に関するコンパクト型と非コンパクト型の双対性は有名だが, その双対性が cohomogeneity one action の全測地的特異軌道に関しても成立する.

定理 3.1 $M = G/K$ を非コンパクト型既約対称空間, $M^* = G^*/K$ をそのコンパクト双対とする. 次の 2 つの集合は, 対称空間の双対によって *1:1* に対応する :

(i) $\{F \subset M \mid F :$ cohomogeneity one action の全測地的特異軌道$\}$,
(ii) $\{F^* \subset M^* \mid F^* :$ cohomogeneity one action の全測地的特異軌道$\}$.

証明. (i) の集合から F を取る. $M = G/K$ に付随するリー環の分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ と表す. 原点 o を $o \in F$ となるように選んでおき, $\mathfrak{m} = T_oF + (T_oF)^{\perp}$ と分解する. 仮定より T_oF はリー三項系である. すなわち,

$$\mathfrak{h} := N_{\mathfrak{k}}(T_oF) + T_oF$$

は部分リー環である. ただしここで, $N_{\mathfrak{k}}(T_oF)$ は $\mathfrak{k}$ における T_oF の正規化群. 次に, コンパクト双対に対応するリー環の分解 $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{m}$ を考える.

$$\mathfrak{h}^* := N_{\mathfrak{k}}(T_oF) + \sqrt{-1}T_oF$$

に対応する G の部分群を H^* とすると, H^* の M^* への作用は cohomogeneity one action であり, $F^* := H^* \cdot o$ はその全測地的特異軌道. この対応が (i) と (ii) の間の 1:1 対応を与える. Q.E.D.

例 3.2 実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ への $SO^0(n-k,1)\times SO(k)$ の作用は, 全測地的特異軌道 $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-k}$ を持つ *cohomogeneity one action* である. 定理 *3.1* によって対応するのは, 球面 S^n 内の全測地的 S^{n-k} であり, これは $SO(n-k+1)\times SO(k)$ の作用の特異軌道.

注 3.3 *Hsiang-Lawson* の結果（定理 *2.2*）により, 球面への *cohomogeneity one action* は, 階数 2 の対称空間のイソトロピー表現と *1:1* に対応する. 上で挙げた $SO(n-k+1)\times SO(k)$ の S^n への作用は, 対称空間 $S^{n-k+1}\times S^k$ のイソトロピー表現から得られるものである.

注 3.4 定理 *3.1* の対応は, *cohomogeneity one action* に関する双対では無く, 全測地的特異軌道に関する双対である. 実際, 球面 S^n への $SO(n-k+1)\times SO(k)$ の作用は, S^{n-k} と S^{k-1} の二つの全測地的特異軌道を持つ. それぞれに対応する $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の全測地的部分多様体は $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-k}$ と $\mathbb{R}\mathrm{H}^{k-1}$ であり, それらは $SO^0(n-k,1)\times SO(k)$ および $SO(n-k+1)\times SO^0(k-1,1)$ の作用の特異軌道である.

4 Hermann 作用 と reflective 部分多様体

前節の双対性（定理 3.1）より, 我々の目指す分類の為には, コンパクト対称空間への cohomogeneity one action のうち, 全測地的特異軌道を持つものを決定すれば良いことになった. Kollross の分類により, 原理的には case-by-case でチェックすれば良いのだが, 分量が膨大であり, 効率的で無い. そこで, reflective 部分多様体という概念を考える.

定義 4.1 リーマン多様体 M の部分多様体 F が *reflective* であるとは, F に関する鏡映が M の等長変換となることである.

注 4.2 *reflective* 部分多様体は等長変換の固定点集合であるので, 全測地的である.

命題 4.3 (Leung [6]) F を対称空間 M の部分多様体, $o\in F$ とする. このとき, F が *reflective* である為の必要十分条件は, T_oF, $(T_oF)^{\perp}$ が共にリー三項系となることである.

注 4.4 よって, 対称空間内の *relrective* 部分多様体 F に対して, その "直交補空間" $F^{\perp}$ という *reflective* 部分多様体が存在する. すなわち, *relrective* 部分多様体は常に $(F,F^{\perp})$ という対として表れる.

対称空間内の reflective 部分多様体は Leung によって分類されている ([6], [7]). ここではその表は載せないことにする.

例 4.5 (向きの付いた)グラスマン多様体 $G_k^+(\mathbb{R}^n)$ の中で $G_{k-1}^+(\mathbb{R}^{n-1})$ と S^{n-k} は, 上の意味で *reflective* 部分多様体の対である.

証明. $G_k^+(\mathbb{R}^n) = SO(n)/SO(k) \times SO(n-k)$ である. 原点での接空間を $\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^{n-k}$ と同一視し,

$$\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^{n-k} \cong (\mathbb{R}^{k-1} + \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^{n-k} \cong (\mathbb{R}^{k-1} \otimes \mathbb{R}^{n-k}) + \mathbb{R}^{n-k}$$

という分解を考えると, $\mathbb{R}^{k-1} \otimes \mathbb{R}^{n-k}$ および $\mathbb{R}^{n-k}$ は共にリー三項系. それぞれに対応する全測地的部分多様体は $G_{k-1}^+(\mathbb{R}^{n-1})$ および S^{n-k} である. Q.E.D.

この例で挙げた $G_{k-1}^+(\mathbb{R}^{n-1})$ は, $SO(n-1)$ の $G_k^+(\mathbb{R}^n)$ への作用の特異軌道である. この作用は Hermann 作用と呼ばれる性質を満たしている.

定義 4.6 コンパクト対称空間 $M = G/K$ への H の作用が *Hermann* 作用であるとは, (G, H) が対称対となることである.

命題 4.7 コンパクト対称空間において, *reflective* 部分多様体とは *Hermann* 作用の全測地的軌道のことである.

証明. reflective 部分多様体に関する鏡映と, 対称対の involution が対応している. Q.E.D.

命題 4.8 F をコンパクト既約対称空間の全測地的部分多様体とする. F が *cohomogeneity one* である *Hermann* 作用の全測地的特異軌道である為の必要十分条件は, F が *reflective* かつ $\mathrm{rank}(F^\perp) = 1$ となること.

証明. 作用の cohomogeneity は slice 表現の cohomogenity と一致し, slice 表現と $F^\perp$ のイソトロピー表現が一致するから. Q.E.D.

この命題により, 我々の目指す分類は, Hermann 作用の場合には達成されたことになる: reflective 部分多様体は分類されており, その中から階数 1 のものを選ぶのは単純な作業である.

5 Non-Hermann 作用の場合

Kollross の分類により, コンパクト対称空間への cohomogeneity one action の大部分は Hermann 作用であることが分かっている. それらについては, 前節で既に調べた. Hermann 作用でない cohomogeneity one action は, それ程数が多く無いので, case-by-case で調べれば良い. 本節では, いくつかの例を挙げる.

例 5.1 対称空間 $G_2/SO(4)$ への $SU(3)$ の作用は *cohomogeneity one* である. その 2 つの特異軌道は $\mathbb{C}P^2 = SU(3)/U(2)$ と $SU(3)/SO(3)$ であり, 共に全測地的である.

証明. 軌道を決定する為には, イソトロピー部分群 $SU(3) \cap SO(4)$ を決定すれば良い. ここで, $SU(3) \subset G_2$ の入り方の違いが, 軌道の違いと対応している.

簡単の為, リー環レベルで調べる. $\mathfrak{g}_2$ の $\mathbb{R}^7$ への既約表現を考える. このとき, $0 \neq v \in \mathbb{R}^7$ を固定する $\mathfrak{g}_2$ の部分リー環が $su(3)$ である. 一方, 表現を $so(4)$ に制限すると, $so(4) \cong sp(1) + sp(1)$ という分解に応じて $\mathbb{R}^7 \cong sp(1) + \mathbb{H}$ と既約分解される. よって,

$$\begin{aligned} v \in sp(1) \text{ の場合}, &\quad su(3) \cap so(4) = u(1) + sp(1) \cong u(2) \\ v \in \mathbb{H} \text{ の場合}, &\quad su(3) \cap so(4) = sp(1) \cong so(3) \\ \text{それ以外の場合}, &\quad su(3) \cap so(4) = u(1) \end{aligned}$$

となる. 上の 2 つの場合が, 特異軌道のイソトロピーに対応している. Q.E.D.

例 5.2 向き付けられたグラスマン多様体 $G_3^+(\mathbb{R}^7)$ への G_2 の作用は *cohomogeneity one* であり, 全測地的特異軌道 $G_2/SO(4)$ を持つ.

証明. リー環 $so(7)$ を $\mathfrak{g}_2$-module として分解すると $so(7) = \mathfrak{g}_2 + \mathbb{R}^7$ となり, $\mathfrak{g}_2$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}$ に関して

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 &= \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \\ \mathbb{R}^7 &= V_0 + V_{\alpha_1} + V_{\alpha_1+\alpha_2} + V_{2\alpha_1+\alpha_2} \end{aligned}$$

という分解を得る. ただしここで,

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$$

は $\mathfrak{g}_2$ のルート系. すると,

$$\mathfrak{k} := \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{\alpha_1} + \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2} + V_0 + V_{\alpha_1}$$

は部分環であり, さらに $\mathfrak{k} \cong so(3) + so(4)$ である. よって,

$$\mathfrak{g}_2 \cap so(3) + so(4) = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{\alpha_1} + \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2} \cong so(4)$$

は特異軌道のイソトロピーである. 特異軌道 $G_2/SO(4)$ が全測地的であることは容易. ちなみに, この作用のもう 1 つの特異軌道も $G_2/SO(4)$ である（お互いに, 向きを反転させる写像で移りあうが, G_2 の元で移すことは出来ない）. また cohomogeneity one であることは, slice 表現が $so(4)$ の $V_{\alpha_1+\alpha_2} + V_{2\alpha_1+\alpha_2} \cong \mathbb{R}^4$ への表現であることから従う. Q.E.D.

6 分類表

本節では, 分類結果を一覧としてまとめておく.

定理 6.1 非コンパクト型既約対称空間 M の全測地的部分多様体 F で, *cohomogeneity one action* の特異軌道となるものは, 次で分類される：

(1) F は M の *reflective submanifold* で $\mathrm{rank}(F^{\perp}) = 1$ をみたすもの,
(2) $G_2^2/SO(4) \subset G_3^*(\mathbb{R}^7) = SO^o(3,4)/SO(3)SO(4)$,
(3) $G_2^{\mathbb{C}}/G_2 \subset SO(7,\mathbb{C})/SO(7)$,
(4) $\mathbb{C}H^2 \subset G_2^2/SO(4)$,
(5) $SL(3,\mathbb{R})/SO(3) \subset G_2^2/SO(4)$,
(6) $SL(3,\mathbb{C})/SU(3) \subset G_2^{\mathbb{C}}/G_2$.

定理 6.2 非コンパクト型既約対称空間 M の *reflective* 部分多様体 F で, $\mathrm{rank}(F^{\perp}) = 1$ をみたすものは, 次で分類される：
$G_k^*(\mathbb{R}^n)$ $(1 < k < n-k, (k,n) \neq (2,2m), m > 2)$: $G_{k-1}^*(\mathbb{R}^{n-1})$, $G_k^*(\mathbb{R}^{n-1})$
$G_k^*(\mathbb{R}^{2k})$ $(k \geq 4)$: $G_{k-1}^*(\mathbb{R}^{2k-1}) = G_k^*(\mathbb{R}^{2k-1})$
$G_2^*(\mathbb{R}^{2n})$ $(n \geq 3)$: $G_1^*(\mathbb{R}^{2n-1}) = \mathbb{R}H^{2n-2}$, $G_2^*(\mathbb{R}^{2n-1})$, $G_1^*(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}H^{n-1}$
$G_3^*(\mathbb{R}^6) = SL(4,\mathbb{R})/SO(4)$: $G_2^*(\mathbb{R}^5) = G_3^*(\mathbb{R}^5)$, $SL(3,\mathbb{R})/SO(3) \times \mathbb{R}$
$G_k^*(\mathbb{C}^n)$ $(1 < k < n-k, (k,n) \neq (2,2m), m > 2)$: $G_{k-1}^*(\mathbb{C}^{n-1})$, $G_k^*(\mathbb{C}^{n-1})$
$G_k^*(\mathbb{C}^{2k})$ $(k \geq 3)$: $G_{k-1}^*(\mathbb{C}^{2k-1}) = G_k^*(\mathbb{C}^{2k-1})$
$G_2^*(\mathbb{C}^{2n})$ $(n \geq 3)$: $G_1^*(\mathbb{C}^{2n-1}) = \mathbb{C}H^{2n-2}$, $G_2^*(\mathbb{C}^{2n-1})$, $G_1^*(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}H^{n-1}$
$G_k^*(\mathbb{H}^n)$ $(1 < k < n-k)$: $G_{k-1}^*(\mathbb{H}^{n-1})$, $G_k^*(\mathbb{H}^{n-1})$
$G_k^*(\mathbb{H}^{2k})$ $(k \geq 2)$: $G_{k-1}^*(\mathbb{H}^{2k-1}) = G_k^*(\mathbb{H}^{2k-1})$
$SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ $(n = 3 \text{ or } n \geq 5)$: $SL(n-1,\mathbb{R})/SO(n-1) \times \mathbb{R}$
$SL(n,\mathbb{H})/Sp(n)$ $(n \geq 4)$: $SL(n-1,\mathbb{H})/Sp(n-1) \times \mathbb{R}$
$SL(3,\mathbb{H})/Sp(3)$: $SL(2,\mathbb{H})/Sp(2) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}H^5 \times \mathbb{R}$, $SL(3,\mathbb{C})/SU(3)$
$SO(n,\mathbb{H})/U(n)$ $(n \geq 5)$: $SO(n-1,\mathbb{H})/U(n-1)$
$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$ $(n \geq 3)$: $Sp(n-1,\mathbb{R})/U(n-1) \times \mathbb{R}H^2$
$SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$ $(n \geq 5)$: $SL(n-1,\mathbb{C})/SU(n-1) \times \mathbb{R}$
$SL(4,\mathbb{C})/SU(4) = SO(6,\mathbb{C})/SO(6)$: $SL(3,\mathbb{C})/SU(3) \times \mathbb{R}$, $SO(5,\mathbb{C})/SO(5)$
$SL(3,\mathbb{C})/SU(3)$: $SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}H^3 \times \mathbb{R}$, $SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$
$SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$ $(n = 5 \text{ or } n \geq 7)$: $SO(n-1,\mathbb{C})/SO(n-1)$
$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$ $(n \geq 3)$: $Sp(n-1,\mathbb{C})/Sp(n-1) \times Sp(1,\mathbb{C})/Sp(1)$
$E_6^2/SU(6)SU(2)$: $F_4^4/Sp(3)SU(2)$
$E_6^{-14}/Spin(10)SO(2)$: $\mathbb{O}H^2$
E_6^{-24}/F_4: $\mathbb{R}H^9 \times \mathbb{R}$, $SL(3,\mathbb{H})/Sp(3)$
$F_4^4/Sp(3)SU(2)$: $G_4^*(\mathbb{R}^9)$
$F_4^{\mathbb{C}}/F_4$: $SO(9,\mathbb{C})/SO(9)$

以上の定理によって, 非コンパクト型既約対称空間への, 全測地的特異軌道を持つ cohomogeneity one action の分類が完成した. コンパクト型既約対称空間の場合も, この分類表と我々の双対性定理 (定理 3.1) により, 分類は完成していると言える.

7 実グラスマン多様体の場合

この節では, 例として, 実グラスマン多様体の場合の分類結果を詳細に述べる.

命題 7.1 向き付けられた実グラスマン多様体 $G_k^+(\mathbb{R}^n)$ に対し，次の全測地的部分多様体は *cohomogeneity one action* の特異軌道として表れる：

(i) $G_{k-1}^+(\mathbb{R}^{n-1}) \subset G_k^+(\mathbb{R}^n)$,
(ii) $G_k^+(\mathbb{R}^{n-1}) \subset G_k^+(\mathbb{R}^n)$,
(iii) $\mathbb{C}P^{n-1} \subset G_2^+(\mathbb{R}^{2n})$,
(iv) $U(3)/SO(3) \subset G_3^+(\mathbb{R}^6)$,
(v) $G_2/SO(4) \subset G_3^+(\mathbb{R}^7)$.

これらのうち，(i) から (vi) は *reflective* 部分多様体であり，(v) だけが *reflective* ではない．

証明． (i) に関しては，例 4.5 で既に証明した．(ii) も同様に，

$$\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^k \otimes (\mathbb{R}^{n-k-1} + \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^{n-k-1}) + \mathbb{R}^k$$

という分解から示される．(iii) は

$$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{2n-2} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{C}^{n-1} + \mathbb{C}^{n-1}$$

という分解から示される．これに対応する reflective 部分多様体 F は，$F = F^{\perp} = \mathbb{C}P^{n-1}$．(iv) も同様に，

$$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \cong S^2(\mathbb{R}^3) + \wedge^2(\mathbb{R}^3)$$

という 2 つのリー三項系に分解する．$S^2(\mathbb{R}^3)$ に対応する reflective 部分多様体が $U(3)/SO(3)$，$\wedge^2(\mathbb{R}^3)$ に対応するのが $SO(3)$ である．$SO(3)$ は階数 1 の対称空間である．(v) は例 5.2 で既に示した． Q.E.D.

参考文献

[1] J. Berndt and H. Tamaru: Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, preprint.

[2] J. Berndt and H. Tamaru: Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, preprint.

[3] E. Cartan: Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Ann. Mat. pura appl. IV. s.* **17** (1938), 177-191.

[4] W. Y. Hsiang, H. B. Lawson Jr.: Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Diff. Geom.* **5** (1971), 1-38.

[5] A. Kollross: A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[6] D.S.P. Leung: On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974), 327-339. Errata: *ibid.* **24** (1975), 1199.

[7] D.S.P. Leung: Reflective submanifolds. III. Congruency of isometric reflective submanifolds and corrigenda to the classification of reflective submanifolds, *J. Diff. Geom.* **14** (1979), 167-177.

〒 102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7-1
上智大学理工学部数学科
田丸 博士 (TAMARU, Hiroshi)
h-tamaru@mm.sophia.ac.jp